



GUIA DE ESTUDIO PARA EL EXAMEN DE ADMISIÓN A LA MAESTRIA EN BIOTECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS

1. Razonamiento matemático
 - 1.1. Razonamiento lógico
 - 1.2. Métodos de razonamiento
 - 1.3. Planteo de ecuaciones
 - 1.4. Situaciones algebraicas
2. Álgebra
 - 2.1. Teoría de exponentes
 - 2.2. Ecuaciones exponenciales
 - 2.3. Factorización
 - 2.4. Fracciones algebraicas
 - 2.5. Ecuaciones cuadráticas
 - 2.6. Sistemas de ecuaciones
3. Funciones
 - 3.1. Concepto de función
 - 3.2. Expresión de una función mediante una ecuación
 - 3.3. Máximos y mínimos
 - 3.4. Funciones lineales o afines
4. Cálculo diferencial
 - 4.1. Límite de una función
 - 4.2. Concepto de derivada
 - 4.3. Derivación de funciones
 - 4.4. Derivadas sucesivas
 - 4.5. Aplicaciones (Máximos y mínimos, Concavidad y simetría, rapidez de cambio)
5. Cálculo integral
 - 5.1. Definición de integral definida
 - 5.2. Cálculo de integrales definidas
 - 5.3. Definición de integral indefinida
 - 5.4. Cálculo de integrales indefinidas

5.5. Aplicaciones (Área bajo la gráfica de una función)

BIBLIOGRAFÍA

- Baldor, Aurelio. (2019) Álgebra. 4a Edición. Patria
- Becerril R, Reyes G. Precálculo (2012) 2a. Edición. Editorial Trillas, México.
- Castelnuovo, Emma. (2018) Razonamiento matemático. 1ª Edición. Trillas, México.
- Larson, R., Edwards, B. (2016) Cálculo I. 10ª edición, México: CENGAGE Learning. (Disponible en BIDI UAM)
- Stewart J., (2018) Cálculo, 8ª edición, México: CENGAGE Learning. (Disponible en BIDI UAM)

Guía de estudio AMPLIADA para el examen de admisión en Matemáticas

1. *Introducción: Comprender que la simbología del álgebra es un lenguaje para representar en forma de modelos generales la manera de resolver problemas y las situaciones experimentales.*

1.1 *Representar situaciones cotidianas que lleven a una ecuación.*

Ejemplo 1.1.1: Se tienen 30 mL de una solución que tiene el 30% de ácido ¿Qué cantidad de solución debe reemplazarse por ácido puro para tener los mismos 30 mL al 45%?

RESPUESTA: Sea x el volumen de solución ácida que se debe reemplazar y si una solución al 30% se refiere a 30 g de ácido por 100 mL de solución ácida, que también se puede escribir como 0.3 g de solución ácida por mL, por lo tanto, la ecuación que resuelve este problema es:
 $30(0.3) - x(0.3) + x(1) = 30(0.45)$, de donde la respuesta final es $x = 6.42$ mL

Ejemplo 1.1.2: En el momento de escribir este problema, mi edad más el triple de la edad que tenía hace 18 años es igual al triple de mi edad. ¿Sabes cuántos años tengo hoy?

RESPUESTA: Sea x mi edad actual en años. La ecuación que resuelve el problema es:
 $x + 3(x - 18) = 3x$, de donde la solución es $x = 54$ años

1.2 *Representar situaciones que lleven a un sistema de ecuaciones lineales.*

Ejemplo 1.2.1: Con una barrica de 110 L de vino se quiere llenar 168 botellas, unas de $\frac{1}{2}$ L y otras de $\frac{3}{4}$ L ¿Cuántas botellas de cada clase se utilizarán?

RESPUESTA: Si x es el número de botellas necesarias de 0.5 L; y es el número de botellas de 0.75 L. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned}x + y &= 168 \text{ botellas} \\x(0.5) + y(0.75) &= 110 \text{ L de vino}\end{aligned}$$

De donde $x = 64$ botellas de medio litro; $y = 104$ botellas de $\frac{3}{4}$.

Ejemplo 1.2.2: La densidad del corcho es un número menor que uno. Si la expresamos con dos decimales, el dígito de los décimos es dos unidades menor que los centésimos. La suma de ambos dígitos es 6. ¿Cuáles son los dígitos? ¿Cuál es la densidad del corcho?

RESPUESTA: Si d es el dígito de los décimos y c el de los centésimos, las ecuaciones resultantes son: $d = c - 2$ y $d + c = 6$; resolviendo para c y d , se obtiene que $d = 2$ y que $c = 4$. Por lo que la densidad del corcho es 0.24.

2. *Revisar las operaciones básicas del álgebra.*

2.1 *Operaciones elementales de suma, resta, multiplicación y división. Revisar las reglas de los exponentes.*

Ejemplo 2.1.1: Resolver las siguientes ecuaciones:

$$(a) 1 - \frac{3 - \frac{x}{2}}{7} = x - (1 - x) \quad (b) \frac{5}{6} = \left(x - \frac{11}{6}\right) - \left(\frac{7}{6} + 2x\right)$$

RESPUESTA:

$$(a) x = \frac{22}{27} \quad (b) x = -\frac{23}{6}$$

Ejemplo 2.1.2: Simplifica las siguientes expresiones:

$$(a) \left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 \left(\frac{s}{r^3}\right)^3 \quad (b) (u^{-2}v^3)^{-3} \quad (c) \frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$$

RESPUESTA:

$$(a) \frac{4s}{r^3} \quad (b) \frac{u^6}{v^9} \quad (c) \frac{2x^4}{y^7}$$

2.2 Revisar la simplificación de expresiones usando factores comunes y términos semejantes.

Ejemplo 2.2.1: Simplifica las siguientes expresiones algebraicas

$$(a) 3x - 5y - (x^2 + 2y) - (-7x^2 - x + 2y) \quad (b) 3(p - q)^2 + (5p + 2)^2 - 2p$$

RESPUESTA:

$$(a) 6x^2 + 4x - 9y \quad (b) 28p^2 + 3q^2 - 6pq + 18p + 4$$

Ejemplo 2.2.2 Simplifica las siguientes expresiones algebraicas

$$(a) 16x^4 - (y - 2z)^2 \quad (b) \frac{w^2 + 7w - 8}{w^2 - 1} \quad (c) \frac{4x^2 - 25}{2x^2 - 9x + 10}$$

RESPUESTA:

$$(a) 16x^4 - (y - 2z)^2 = (4x^2)^2 - (y - 2z)^2 = [(4x^2) + (y - 2z)][(4x^2) - (y - 2z)] \\ = (4x^2 + y - 2z)(4x^2 - y + 2z)$$

$$(b) \text{ Se factoriza } \frac{(w + 8)(w - 1)}{(w + 1)(w - 1)} = \frac{(w + 8)}{(w + 1)}$$

$$(c) \text{ Se factoriza } \frac{(2x - 5)(2x + 5)}{(2x - 5)(x - 2)} = \frac{(2x + 5)}{(x - 2)}$$

2.3 Revisar el uso de desigualdades y valor absoluto.

Ejemplo 2.3.1 Resuelve las desigualdades:

$$(a) \frac{5z + 2}{2} < \frac{5}{3} \quad (b) (3 + x)(3 - x) < (4 - x)(2 + x)$$

$$(c) \frac{5x - 11}{-2} > \frac{3x - 5}{4} \quad (d) |4x - 2| < 9$$

RESPUESTA:

(a) $z < \frac{4}{15}$ (b) $x > \frac{1}{2}$ (c) $x < \frac{27}{13}$ (d) $-\frac{7}{4} < x < \frac{11}{4}$

2.4 Revisar las funciones de potencia: la exponencial, potencias base 10 y base 2.

Ejemplo 2.4.1: Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

(a) $7^{3x} = 7^{2x+5}$ (b) $3^{5x-8} = 9^{x+2}$ (c) $2^{2x+1} = 8^{x-1}$ (d) $2^{-100x} = (0.5)^{x-4}$

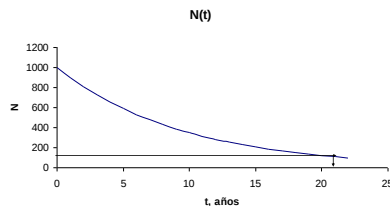
RESPUESTA:

(a) $x = 5$ (b) $x = 4$ (c) $x = 4$ (d) $x = -\frac{4}{99}$

Ejemplo 2.4.2: En un gran estanque se introducen 1000 truchas de un año de edad el número de truchas todavía vivas después de t años se calcula mediante $N(t) = 1000 (0.9)^t$. En una gráfica de N contra t , encuentra cuándo estarán todavía vivas 100 truchas.

RESPUESTA:

En la gráfica se observa que entre 21 y 22 años después, todavía se encontrarán 100 truchas vivas



2.5 Revisar el concepto de logaritmo.

Ejemplo 2.5.1: Encuentra el valor de x :

(a) $x = \log_{10}(10^7)$ (b) $\log_2 x = 5$ (c) $\log_2(2^{3x}) = 2$ (d) $2 + \log_{10} x = 4$

RESPUESTA:

(a) $x = 7$ (b) $x = 32$ (c) $x = \frac{2}{3}$ (d) $x = 100$

Ejemplo 2.5.2 En las siguientes expresiones resuelve para x :

(a) $\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 2$ (b) $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 1$

RESPUESTA:

(a) $x = \left(\frac{e^4 - 1}{2e^2} \right)^2$ (b) $x = \left(\frac{e-1}{e+1} \right)$

3. Revisar con detalle las funciones y gráficas de una línea recta, polinomios de segundo orden, potenciales, exponenciales y logarítmicas.

Ejemplo 3.1: Asocia las funciones de la izquierda con las gráficas de la derecha.

(a) $y = 2x$

(b) $y = \text{sen}x$

(c) $y = 5 - 2x$

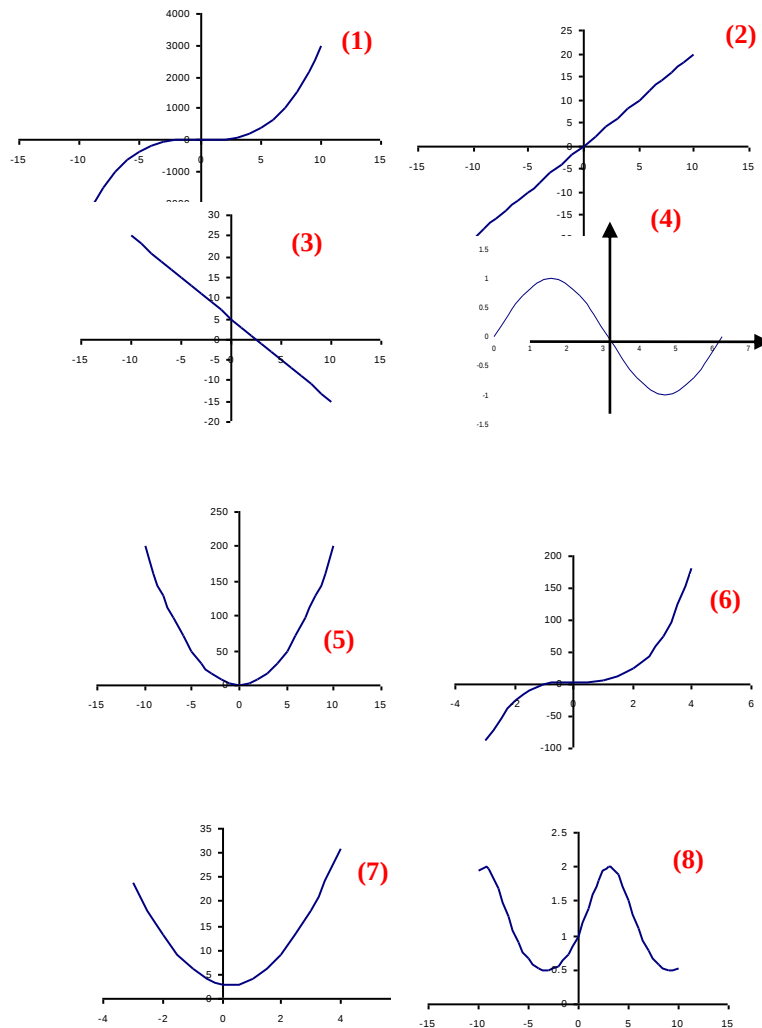
(d) $y = 2x^2$

(e) $y = 3x^3$

(f) $y = 3x^3 - x^2 + 4$

(g) $y = 2x^2 - x + 3$

(h) $y = 2\text{sen}(0.5)x$

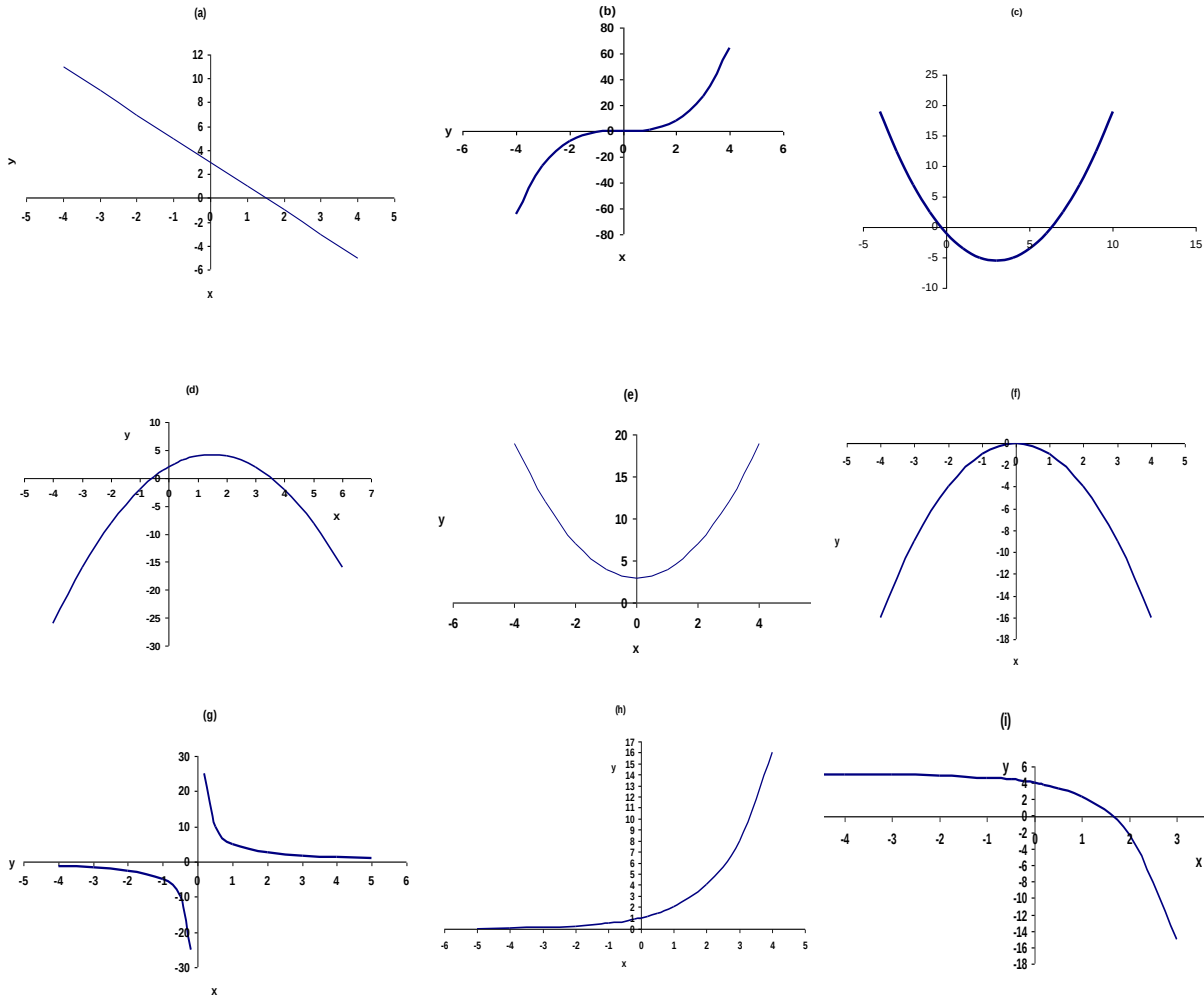


RESPUESTA:

(a) (2) (b) (4) (c) (3) (d) (5) (e) (1)

(f) (6) (g) (7) (h) (8)

Ejemplo 3.2: Encuentra las funciones de las gráficas siguientes:



RESPUESTA:

(a) $y = 3 - 2x$	(b) $y = x^3$	(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3x - 1$
(d) $y = 2 + 3x - x^2$	(e) $y = 3 + x^2$	(f) $y = -x^2$
(g) $y = \frac{5}{x}$	(h) $y = 2^x$	(i) $y = 5 - e^x$

4. *Revisar los procedimientos para la obtención de las derivadas de las funciones del inciso anterior y los procedimientos para obtener máximos y mínimos de una función aplicando la primera y segunda derivada.*

Ejemplo 4.1: Encuentra las derivadas de las funciones (a) y (d) del inciso anterior

RESPUESTA:

- (a) La derivada de un polinomio es la suma de las derivadas individuales de los sumandos del polinomio, así la derivada de la función (a) es: $y' = -2$
 (b) La derivada de la función (d) es: $y' = 3 - 2x$

Máximos y mínimos de una función aplicando la primera y segunda derivada.

Considera que el criterio de la segunda derivada para extremos relativos es:

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I ,

Sea c un punto de I , tal que $f'(c) = 0$. Entonces:

- i. Si $f''(c) < 0$, entonces, f presenta un máximo relativo en c .
- ii. Si $f''(c) > 0$, entonces, f presenta un mínimo relativo en c .

Ejemplo 4.2: Para un intervalo abierto $(-\infty, +\infty)$, encuentra el máximo o el mínimo de la función: $f(x) = 3x + x^2$

RESPUESTA:

La derivada es: $f'(x) = 3 + 2x$, que igualando con cero, $f'(x) = 3 + 2x = 0$ y resolviendo para x , resulta que $x = -\frac{3}{2}$ satisface la igualdad anterior. Así, con la segunda derivada de $f(x)$; $f''(x) = 2$, resulta que $f''(x) > 0$. Por lo tanto la función original, $f(x) = 3x + x^2$ tiene un mínimo relativo al punto $x = -\frac{3}{2}$

Ejemplo 4.3: Durante las primeras 6 horas de crecimiento, *Escherichia coli* tiene un comportamiento que sigue la función: $X = 7t^2 - 5t + 3$. Donde X es la biomasa ($g\ L^{-1}$) y t es el tiempo de crecimiento (h). Para el intervalo de tiempo de validez de la función, $0 \leq t \leq 6$, encuentra el crecimiento máximo o mínimo.

RESPUESTA:

La primera deriva es $\frac{dX}{dt} = 14t - 5$. Igualando con cero, $14t - 5 = 0$, resolviendo para t , resulta $t = \frac{5}{14}$. La segunda derivada, $\frac{d^2X}{dt^2} = 14$ indica que es positiva y por lo tanto en el punto $t = \frac{5}{14}$ se localiza un mínimo de crecimiento. Porque $t = \frac{5}{14}$ es un punto que se localiza dentro del intervalo de validez de la función de crecimiento.

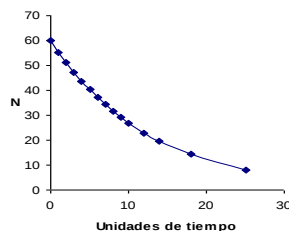
5. **Aplicaciones a la Biotecnología de los conceptos de los incisos 3 y 4: vida media y tiempo de duplicación. Estimación gráfica de velocidades específicas de un proceso. Funciones potenciales y el escalamiento de procesos de seres vivos.**

Ejemplo 5.1: Si el yodo radioactivo sigue la cinética de decaimiento:

$$N(t) = N_0 e^{-0.08t}$$

- a) Para $N_0=60$. Hallar $N(16)$.
- b) ¿Cuál es la vida media del yodo?
- c) Graficar la función

RESPUESTA: $N(16) = 60 e^{-0.08(16)} = 16.68$ unidades de tiempo. La vida media corresponde al tiempo necesario para que desaparezca el 50% del yodo inicial, por lo que es necesario hallar t cuando $N = N_0/2$; sustituyendo: $N_0/2 = N_0 e^{-0.08t}$, de donde: $1 = 2 e^{-0.08t}$ que se satisface con $t = 8.66$ unidades de tiempo. La gráfica de la función es:



Ejemplo 5.2: La inhibición de la velocidad de reacción (V) de una enzima por un sustrato S está descrita por la función:

$$V = \frac{V_{Max} S}{K_s + S + \frac{S^2}{K_i}}$$

gráficamente:

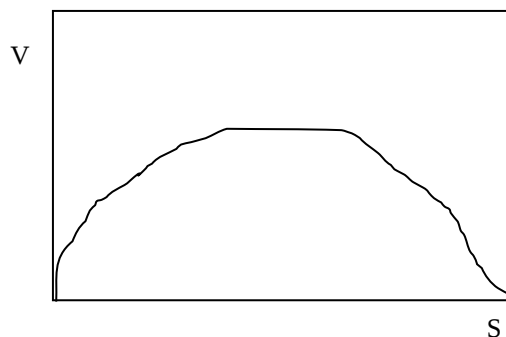
Donde:

V_{Max} es la máxima velocidad de reacción, constante.

S es la concentración del sustrato

K_s y K_i son constantes características

Encontrar el valor de S donde se encuentra la máxima velocidad de reacción.



RESPUESTA: Derivando la función con respecto a S, igualando a cero se llega a que la S del máximo corresponde a:

$$S^2 = K_s K_i \text{ bien que } S = \sqrt{K_s K_i}$$

Ejemplo 5.3: Se disuelve azúcar en agua, de tal forma que el azúcar no disuelta se calcula con la expresión $A(t) = B e^{kt}$, siendo B la cantidad inicial de azúcar y t el número de horas que han transcurrido después de agregar el azúcar. Si se agregan 7 kg de azúcar y se disuelven 2 kg en 3 horas ¿Cuánta azúcar quedará sin disolver después de 5 horas?

RESPUESTA:

Si en $t=0$, $B = 7$ kg de azúcar y la cantidad de azúcar no disuelta en $t=3$ h está dada por $A(3) = 7 e^{3k}$ que corresponde a $(7 - 2) = 5$ kg de azúcar no disuelto; despejando k se obtiene que $k = -0.11 \text{ h}^{-1}$ por lo tanto

$$A(5) = 7 e^{(-0.11)5} = 3.99 \text{ kg de azúcar no disuelta después de 5 h.}$$

6. Revisar el concepto de integral definida como el cálculo del área bajo la curva.

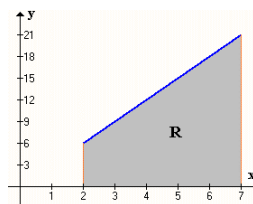
Ejemplo 6.1. Encontrar el área bajo la curva (R) de la función $f(x) = 3x$ en el intervalo $[2,7]$

Respuesta: Para calcular el área (R) de la integral definida $\int_2^7 3x dx$ primero se encuentra la primitiva de $f(x) = 3x$,

es decir, $\int 3x dx = \frac{3}{2} x^2$, después se evalúa esta función en los límites de integración:

$$R = \frac{3}{2}(7)^2 - \frac{3}{2}(2)^2 = \frac{135}{2}$$

gráficamente



Ejemplo 6.2. Encontrar el área bajo la curva (R) de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,2]$

Respuesta: Para calcular el área (R) de la integral definida $\int_0^2 x^2 dx$ primero se encuentra la primitiva de $f(x) = x^2$, es decir, $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$, después se evalúa esta función en los límites de integración:

$$R = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(0)^3 = \frac{8}{3} \quad \text{gráficamente}$$

